Lemme de Morse

Lemme 1. *Soit $A_0 \in GL_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R})$. Alors il existe un voisinage V de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et $\rho : V, GL_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $A \in V$, on a ${}^t\rho(A)A_0\rho(A)$.*

Démonstration.

Étape 1 : Soit $A_0 \in GL_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R})$. On pose :

$$\chi : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & S_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & {}^tMA_0M \end{array} \right.$$

Par régularité du produit et de la transposition des matrices, cette application est polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^1$. Pour $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\chi(I_n + H) - \chi(I_n) = {}^t(I_n + H)A_0(I_n + H) - A_0 = A_0H + {}^tHA_0 + {}^tHA_0H = {}^t(A_0H) + A_0H + o(\|H\|)$$

Donc $d\chi_{I_n}(H) = {}^t(A_0H) + A_0H$ et H est dans $\operatorname{Ker} d\chi_{I_n}$ si, et seulement si, H est antisymétrique.

Étape 2 : On voudrait appliquer le théorème d'inversion locale à χ, mais comme $d\chi_{I_n}$ n'est pas inversible, on va devoir être plus judicieux. Posons $F = \left\{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A_0H \in S_n(\mathbb{R})\right\}$ et $\psi = \chi|_F : F \to S_n(\mathbb{R})$, on a $I_n \in F$ et $\operatorname{Ker} d\psi_{I_n} = \operatorname{Ker} d\chi_{I_n} \cap F = \{0\}$. Comme F et $S_n(\mathbb{R})$ ont même dimension, $d\psi_{I_n}$ est un isomorphisme, et comme ψ est de classe $\mathcal{C}^1$, par le théorème d'inversion locale, il existe $U \subset F$ un voisinage ouvert de I_n tel que ψ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre U et $V = \psi(U)$.
Quitte à remplacer U par $U' = U \cap GL_n(\mathbb{R})$, qui est un ouvert car U et $GL_n(\mathbb{R})$ le sont, on peut supposer que U est inclus dans $GL_n(\mathbb{R})$. Ainsi, V est un voisinage ouvert de $A_0 = \psi(I_n)$ dans $S_n(\mathbb{R})$ avec :

$$\forall A \in V,\ A = {}^t(\psi^{-1}(A))A_0\psi^{-1}(A)$$

On pose alors $\rho = \psi^{-1}$ qui convient. □

Théorème 2 (Lemme de Morse)**.** *Soient $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$, telle que $df_0 = 0$ et d^2f_0 est non dégénérée de signature $(p, n-p)$. Alors il existe deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$, liés par un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\varphi : x \mapsto u$, avec $\varphi(0) = 0$ et :*

$$f(x) - f(0) = u_1^2 + \ldots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \ldots - u_n^2 = \sum_{i=1}^{p} u_i^2 - \sum_{i=p+1}^{n} u_i^2$$

Démonstration.

On commence par appliquer la formule de Taylor avec reste intégrale sur f :

$$f(x) = f(0) + df_0(x) + \int_0^1 \frac{(1-t)^1}{1!} d^2f_{tx}(x,x)dt = \int_0^1 (1-t)d^2f_{tx}(x,x)dt$$

Ainsi, $f(x) - f(0) = {}^txQ(x)x$ avec $Q(x) = \int_0^1 (1-t)d^2f_{tx}dt$ est une matrice symétrique réelle.
Ici, $Q(x)$ est symétrique, avec $Q(0) = \frac{1}{2}d^2f_0 \in GL_n(\mathbb{R})$. Par le lemme, il existe V un voisinage de $Q(0)$ dans

$S_n(\mathbb{R})$, et $\rho : V \to GL_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que ${}^t\rho(A)Q(0)\rho(A)$ pour tout $A \in V$.
Par continuité de Q (continuité sous intégrale), il existe W un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall x \in W, \quad Q(x) \in V \quad \text{et} \quad Q(x) = {}^t(\rho(Q(x)))Q(0)\rho(Q(x))$$

On pose $M(x) = \rho(Q(x))$ et $y = M(x)x$, on a alors : $f(x) - f(0) = {}^t yQ(0)y$.
Comme $Q(0) = \frac{1}{2}d^2 f_0$ est de signature $(p, n-p)$, il existe $A \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que :

$${}^t AQ(0)A = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}$$

En posant $u = A^{-1}y$, on a :

$$f(x) - f(0) = {}^t yQ(0)y = {}^t u \, {}^t AQ(0)Au = \sum_{i=1}^{p} u_i^2 - \sum_{i=p+1}^{n} u_i^2$$

On pose alors $\varphi(x) = A^{-1}M(x)x$, on a bien $\varphi(0) = 0$, et φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur W. Puis, pour $h \in W$, on a :

$$\varphi(h) - \varphi(0) = A^{-1}M(h)h = A^{-1}M(0)h + o(\|h\|)$$

D'où $d\varphi_0 = A^{-1}M(0)$ qui est inversible. Par le théorème d'inversion locale, φ induit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre deux voisinages de 0, ce qui donne le résultat.

□

Conclusion. Toute fonction de classe $\mathcal{C}^3$ est une application quadratique, à un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local près, dès que sa différentielle est nulle et sa hessienne non dégénérée. ◁

Références

[Rou] François Rouvière. *Petit Guide de Calcul Différentiel.* Cassini